Für weitere Fragen stehen wir mit unserem Team jederzeit zur Verfügung.

RWP GmbH

Am Münsterwald 11
D 52159 Roetgen

Tel.: +49 (0) 2471 1230 0
Fax: +49 (0) 2471 1230 99

eMail: rwp@rwp-simtec.de
Internet: www.rwp-simtec.de

Vergleich zweier Methoden zur Gießprozesssimulation
Finite Elemente Methode (FEM) und Finite Differenzen Methode (FDM/FVM)

Ch. Honsel; K. Weiß

Viele technische Prozesse können mathematisch nicht in analytischer Form, sondern nur in Form von Differentialgleichungen beschrieben werden. Da solche Gleichungen normalerweise nicht direkt (analytisch) gelöst werden können, werden Näherungsverfahren zur Lösung herangezogen. In der kommerziellen Anwendung haben sich hier vor allen anderen die Methode der finiten Differenzen und die Methode der finiten Elemente etabliert. Da für den Nichtfachmann die beiden Methoden nahezu gleich zu sein scheinen, soll der folgende Beitrag Hilfestellung zur Unterscheidung geben.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}$$

Fourier'sche Differentialgleichung zur Beschreibung von Wärmeleitungsprozessen. (1)

$$(\rho c_p)(T)\left(\frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}\right) =$$
$$\lambda(T)\left[\frac{T(x+\Delta x,t)-2T(x,t)+T(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}\right]$$

FDM/FVM:
Die Differentialgleichung (1) wird in eine Differenzengleichung umgewandelt (hier ausgeführt für den eindimensionalen Fall) (2)

$$I(T) := \iiint_V \left\{ \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^{(2)} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^{(2)} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^{(2)}\right] + \rho c_p T \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{Q}T \right\} dxdydz$$
$$+ \iint_R \left\{ \frac{1}{2}\alpha(u,v)T^2 - \gamma(u,v)T \right\} dudv \overset{!}{=} \text{minimal}$$

FEM:
Die Lösung der Differentialgleichung (1) erfolgt über die Lösung eines äquivalenten Variationsproblems (3)

Bei der **FDM/FVM** wird die Differentialgleichung einfach in eine Differenzengleichung umgewandelt **(2)**. Um die Differenzen berechnen zu können, wird die Geometrie in ein orthogonales Raster zerlegt. Für jeden Quader, der sich damit als Grundelement ergibt, erhält man eine Gleichung und eine Unbekannte.

Bei der **FEM** erfolgt die Lösung der Differentialgleichung über die Lösung eines äquivalenten Variationsproblems. Auch hier wird zur Lösung der Gleichung (3) die zu berechnende Geometrie in kleine Grundelemente zerlegt. Während die **FDM/FVM** Methoden normalerweise auf ein orthogonales Raster angewiesen sind, können bei der **FEM** fast beliebige Elementformen benutzt werden. Die Differentialgleichung wird dann dadurch gelöst, dass eine Annahme über den Verlauf der gesuchten Größe in einem solchen Grundelement getroffen wird. So nimmt man z.B. an, dass sich die Temperatur in dem Grundelement linear oder quadratisch ändert.
Auch wenn es bei manchen **FDM/FVM** Programmen nicht mehr sichtbar ist, führt diese Art der Vernetzung zwangsläufig zu einer relativ schlechten Geometrie-approximation. Zunächst scheint das nur ein optisches Problem zu sein, bei näherer Betrachtungsweise ist es jedoch weit mehr als das. Es ist zum Beispiel nicht möglich, einen dünnwandigen Hohlzylinder mit konstanter Wandstärke in Quadern zu vernetzen (vgl. **Bild 1)**, was natürlich dazu führen muss, dass eine solche Wand z. B. bei einer Erstarrungsberechnung über den Umfang verteilt nicht die gleiche Temperaturverteilung haben kann, es sei denn sie wäre so ungenau, dass sich die

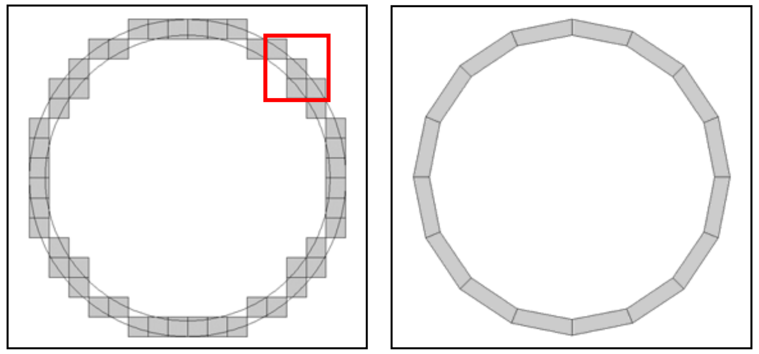

Bild 1:
FDM/FVM: 108 Knoten, 48 Elemente — **FEM:** 32 Knoten, 16 Elemente

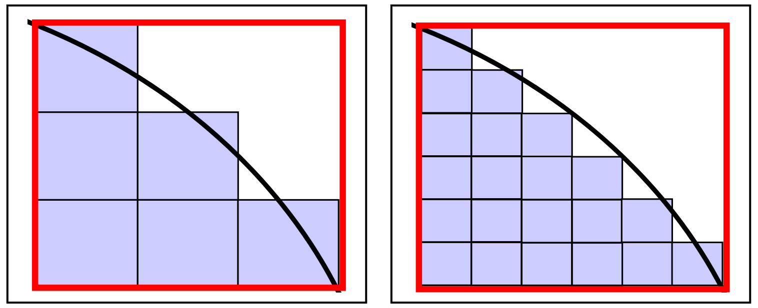

Bild 2:
FDM/FVM: Auch durch eine beliebig feine Vernetzung lässt sich bei der FDM/FVM Methode das Missverhältnis zwischen vernetzter Oberfläche und realer Oberfläche nicht beheben. Liegt im 2d Fall das orthogonale Gitter um 45° zur realen Oberfläche verdreht, so ist die vernetzte Oberfläche um den Faktor $\sqrt{2}$ zu groß.

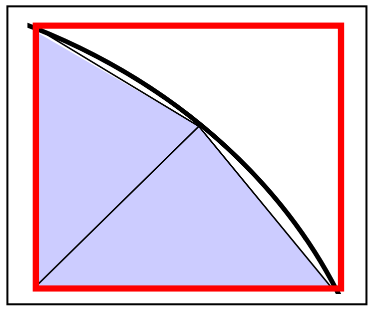

Bild 3:
FEM: Schon bei einer groben Vernetzung ist die Abbildungsqualität der Vernetzung sehr gut.

unterschiedliche Wandstärke gar nicht bemerkbar macht.
Besonders gravierend wird dieser Nachteil bei der Behandlung von Wärmeübergängen. Die Wärme im Gussteil kann nur über die Oberfläche in die Form abgeführt werden. Dieser Vorgang wird durch die Formel

$$\dot{Q} = \alpha \; A \; \Delta T$$

mit
- α: [W/m²K] Wärmeübergangskoeffizient
- A: [m²] Fläche an der Phasengrenze, über die der Wärmeaustausch erfolgt.
- ΔT: [K] Temperaturdifferenz an der Phasengrenze

beschrieben. Es wird direkt ersichtlich, dass die Kontaktfläche eine wesentliche Rolle bei dem Wärmeaustausch spielt. Aber genau hier wird der Nachteil der orthogonalen Vernetzung deutlich. Verläuft die Geometriekontur in einem Winkel von 45° zum orthogonalen Gitter, so ist die vernetzte Oberfläche im 2d Fall um den Faktor $\sqrt{2}$ zu groß. Während das vernetzte Volumen mit zunehmender Netzfeinheit sich immer mehr dem realen Volumen annähert, kann das Missverhältnis zwischen vernetzter und realer Oberfläche auch durch eine beliebig feine Vernetzung nicht behoben werden.

Auch wenn es schöner aussieht, im Grunde ist es ein Nachteil für den Benutzer, wenn FDM/FVM basierte Programme dazu übergehen, die der Berechnung zugrundeliegende Netzstruktur nicht mehr zu zeigen. Jeder, der sich intensiver mit der numerischen Simulation beschäftigt hat, weiß, dass die Qualität der Ergebnisse auch von der Struktur der Diskretisierung abhängig ist. Ist diese Struktur nicht mehr sichtbar, werden eventuelle Vernetzungsfehler gar nicht mehr erkannt. Dementsprechend ist die Interpretation der Ergebnisse nur schwer durchführbar, da nicht mehr erkennbar ist, ob eine Problemzone einen Diskretisierungsfehler oder einen Gussfehler darstellt.

Vergleich zweier Methoden zur Gießprozesssimulation

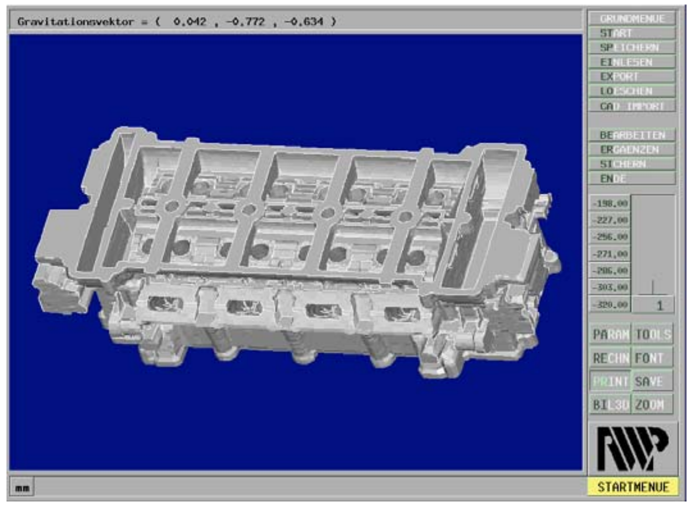

Bild 4:
FEM: Eine **FEM** Vernetzung besticht auch bei komplexen Bauteilen durch eine hohe Konturgenauigkeit auch schon bei relativ niedrigen Knotenzahlen.

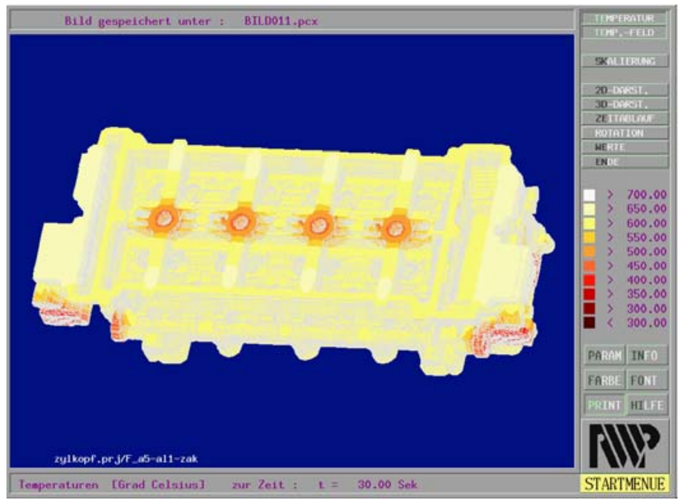

Bild 5:
FEM: Die Methode der finiten Elemente ermöglicht dem Benutzer die schnelle und präzise Berechnung der verschiedensten technischen Problemstellungen.

Um den Nachteil der orthogonalen Vernetzung auszugleichen, muss bei den **FDM/FVM** Methoden mit einer wesentlich feineren Maschenweite gerechnet werden. Teure Cluster-Rechner mit vielen Prozessoren werden benötigt, um komplexe Systeme berechnen zu können, während für die **FEM** Berechnungen auch in solchen Fällen ein handelsüblicher PC ausreicht. „Hardware interessiert mich nicht“ ist ein Argument, das man angesichts immer schnellerer und billigerer Prozessoren immer wieder hört – seit über 10 Jahren. Dennoch scheitern komplexe Rechnungen auch heute noch immer wieder an der begrenzten Hardware, weil die Anforderungen an die Genauigkeit einer Berechnung mindestens in dem Umfang steigt, in dem sich die Hardware verbessert. Waren es gestern noch “einfache“ Erstarrungssimulationen, werden es morgen gekoppelte Berechnungen von Temperaturfeldern, Verzug und Eigenspannungen sowie Mikrostrukturen sein, die von den Berechnungsprogrammen erwartet werden.

RWP GmbH, Am Münsterwald 11 52159 Roetgen www.rwp-simtec.de