

Ch. Honsel; K. Weiß

Die Berechnung von Wärmeleitungs- und Erstarrungsvorgängen mit der Methode der
 Finiten Elemente (**FEM**)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mathcal{Q}$$

Fourier'sche Differentialgleichung zur Beschreibung von Wärmeleitungsprozessen. (1)

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z)$$

Anfangsbedingung eines instationären Temperaturfeldes (2)

$$T(u, v, t = 0) = g(u, v, t)$$

Dirichlet - Randbedingung (3)

$$\lambda(u, v) \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(u, v)(T - T^0) = \gamma(u, v, t)$$

Cauchy - Randbedingung (4)

$$I(T) := \iiint_V \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \rho c_p T \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{Q} T \right\} dx dy dz$$

$$+ \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \alpha(u, v) T^2 - \gamma(u, v) T \right\} dudv \Rightarrow \text{minimal}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (1) erfolgt über die Lösung eines äquivalenten Variationsproblems (5)

Die Grundlage der Berechnung von Wärmeleitungsprozessen ist die Wärmeleitungsgleichung von Fourier (1). In dieser partiellen Differentialgleichung wird die Temperatur **T** beschrieben als Funktion der Raumkoordinaten **X, Y, Z** und der Zeit **t**. Die zeitliche Änderung der Temperatur an einem Ort ergibt sich aus den zu- bzw. abfließenden Wärmemengen zuzüglich eines Terms für die Wärmequellen und -senken. Zur eindeutigen Beschreibung eines instationären Temperaturfeldes werden noch Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Die Anfangsbedingung (2) liefert eine Beschreibung des Temperaturfeldes zu einem Zeitpunkt **t=0**. Die Randbedingungen liefern eine Aussage über die Temperatur auf der Oberfläche des Körpers für die Zeit **t>0**. Dazu werden in der Regel zwei verschiedene Ansätze benutzt. Die **Dirichlet** - Bedingung (3) enthält eine Angabe einer konkreten Temperatur als Funktion des Ortes und der Zeit, während die **Cauchy**-Bedingung (4) die räumliche Ableitung der Temperatur normal zu Oberfläche mit in die Beschreibung einbezieht, so dass auch Vorgänge wie Konvektion oder Isolation mathematisch erfasst werden können.

Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt über die Lösung eines äquivalenten Variationsproblems (5) (Richer, 1986). Zur Lösung dieses Funktionals wird die Geometrie aufgeteilt in kleine (finite) Elemente, in unserem Fall in Prismen. Alle Prismen werden durch eine Transformation abgebildet auf ein Einheitsprisma. Statt die Integration über die ganze Geometrie durchzuführen, erfolgt die Integration über das Standardprisma. Dabei wird z.B. eine lineare Ansatzfunktion zur Berechnung der Temperatur innerhalb des Prismas gewählt. Man geht also davon aus, dass sich die Temperaturen innerhalb des Elementes entlang einer Geraden ändert. Je weiter das tatsächliche Temperaturfeld von diesem geraden Verlauf abweicht, desto größer wird der Fehler in der numerischen Berechnung sein.

$$\dot{AT} = BT + C$$

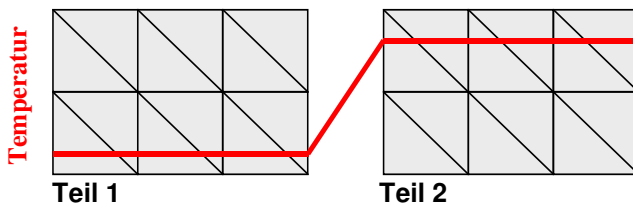
System gewöhnlicher Differentialgleichungen (6)

$$[A - \Delta t B]T(t + \Delta t) = AT(t) + \Delta t C$$

Rückwärtsgenommenes Euler-Verfahren zur Lösung des Differentialgleichungssystems (6) (7)

Aber nur mit einer konkreten Annahme über den Verlauf der Temperatur lässt sich die Integration für jedes Prisma durchführen. Die Minimierung wird dadurch gelöst, dass man das Verschwinden der ersten partiellen Ableitung fordert. Damit erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (6), die z.B. mit dem rückwärtsgenommenen Euler-Verfahren gelöst werden (7), welches auch bei größeren Zeitschrittweiten zuverlässige Ergebnisse liefert. Auf diese Weise kann die partielle Differentialgleichung (1) zurückgeführt werden auf ein lineares Gleichungssystem (7).

Berücksichtigung des Wärmeübergangs an Phasengrenzen:



Der Wärmefluss an einer Phasengrenze hat ganz wesentlichen Einfluss auf das Abkühlungsverhalten eines Gussteils. Aus diese Grund kommt der numerischen Behandlung sowie der Kenntnis der physikalischen Eigenschaften große Bedeutung zu.

Bild 1: Temperaturverlauf an einer Phasengrenze

Im SIMTEC/WinCast® werden an der Phasengrenze für den Benutzer unbemerkt "virtuelle" Elemente eingefügt und das Wärmeübergangsproblem auf ein Wärmeleitungsproblem zurückgeführt (vgl.: **(Stafford et al, 1987)**). Die numerische Stabilität dieser Vorgehensweise lässt sich leicht durch einen Vergleich mit einer entsprechenden analytischen Lösung vergleichen. **H.S. Carslaw** und **J.C. Jaeger** haben bereits 1959 zu verschiedenen (meist eindimensionalen) Wärmeleitungsproblemen entsprechende Lösungen hergeleitet. Bild 2 zeigt, dass die numerische Lösung relativ unabhängig von der Zeitschrittweite in hohem Maße mit der analytischen Lösung übereinstimmt.

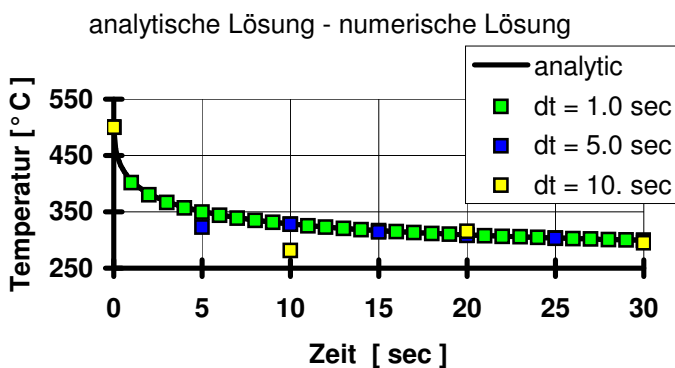


Bild 2: Vergleich zwischen einer analytischen und entsprechenden numerischen Lösung

Wie oben bereits gesagt, ist neben der numerischen Stabilität auch die Kenntnis der richtigen Wärmeübergangsdaten von Bedeutung. Hierzu werden an verschiedenen Forschungseinrichtungen (z.B. FH Friedberg) Untersuchungen vorgenommen. Für den Benutzer wichtig ist eine offene Schnittstelle, so dass er die Möglichkeit hat neuste Ergebnisse in seine Rechnung einzubeziehen.

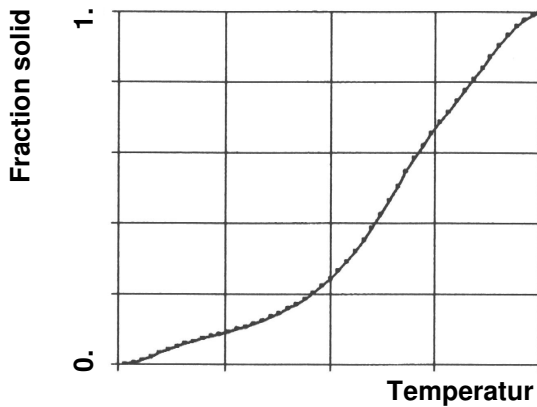


Bild 3: Volumenanteil an erstarrtem Material als Funktion der Temperatur

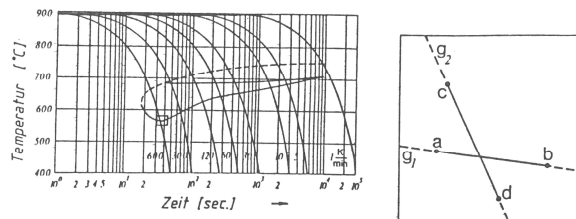


Bild 4: Aus kontinuierlichen Zeit- Temperaturumwandschaubildern können Gitterumwandlungen ermittelt und die dazugehörigen Wärmemengen berücksichtigt werden [Wolf, G. et. al. 1990].

Berücksichtigung der latenten Wärme bei Phasenübergängen:

Bei der Erstarrung von Metallen wird im Zusammenhang mit dem Aufbau des Kristallgitters eine innere Energie frei, die das Temperaturverhalten eines Bauteils entscheidend beeinflusst. Die freiwerdende Energiemenge kann durchaus 1/3 des gesamten Energiehaushaltes betragen. Abhängig von der Legierungszusammensetzung kann der Anteil der freiwerdenden Menge latenter Wärme innerhalb des Liquid- Solidintervalls erheblich von dem linearen Verlauf abweichen (3). Eine solche Verteilungsfunktion kann als stoffabhängige Größe eingelesen und berücksichtigt werden. Ist die Verteilungsfunktion nicht bekannt, so wird eine Standard-Verteilungsfunktion ausgewählt. Ein weiterer den Erstarrungsablauf beeinflussenden Einflussfaktor ist der Keimzustand einer Legierung. Je nach dem mit welchem Gradienten der Eintritt in das Liquid- Solidintervall erfolgt, kann sowohl bei der Vorerstarrung als auch bei der eutektischen Erstarrung eine deutliche Unterkühlung eintreten, die ebenfalls berechnet werden kann.

Zur Berechnung der Gefügeausbildung ist nicht nur der Temperaturverlauf bis zur Solidustemperatur zu berücksichtigen, unter Umständen können auch bei deutlich tieferen Temperaturen noch Gitterumwandlungen stattfinden. Zur Berechnung der Gefügeausbildung werden die Abkühlkurven mit Zeit-Temperaturumwandschaubildern (Bild 4) überlagert. Aus den Schnittpunkten zwischen den Gefügekennlinien und den Abkühlkurven ergibt sich für jeden Punkt eine spezifische Gefügezusammensetzung die dabei freigesetzte Energie kann dabei wie oben für die latente Wärme bereits beschrieben, berücksichtigt werden.

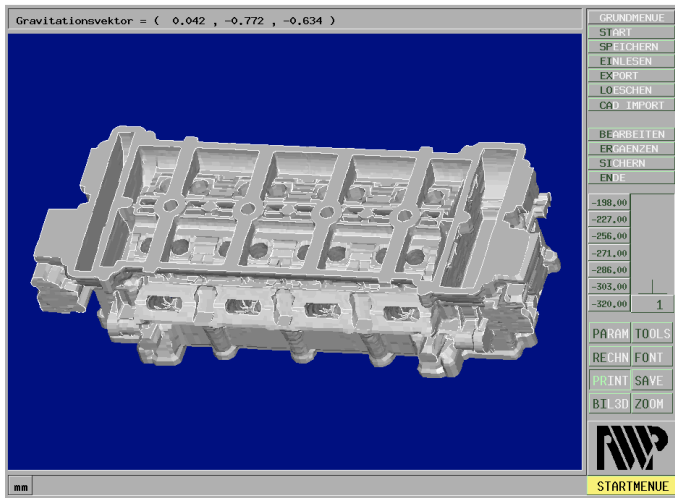


Bild 3:

Eine **FEM** Vernetzung besteht auch bei komplexen Bauteilen durch eine hohe Konturgenauigkeit auch schon bei relativ niedrigen Knotenzahlen.

Bei der Erstarrung von Metallen wird im Zusammenhang mit dem Aufbau des Kristallgitters eine innere Energie frei, die das Temperaturverhalten eines Bauteils entscheidend rückwärtsgenommenes Euler-Verfahren zur Lösung des Differentialgleichungssystems (6)

Richter, W.

Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode
Braunschweig, 1986

Stafford, R.O.; Rice, A.B.; Pinella, D.F.

Proc. Of the 1987 ASME Intl. Computers in Engng. Conf. N.Y., Part 2 S. 437-455;
Hrsg. Raghaven, R. und Cokonis, T.J. ASME, New York 1987

Carslaw, H.S.; Jaeger, J.C.

Conduction of Heat in Solids
London, 1959

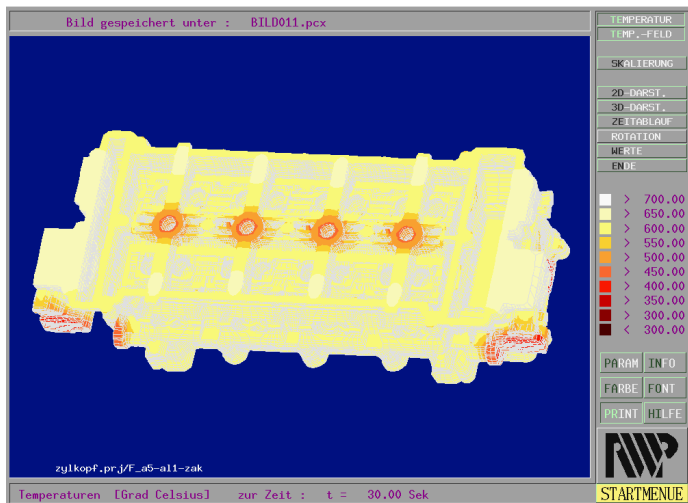


Bild 4:

Temperaturfeld eines Zylinderkopfes nach 30 s.